Θεωρία Δικτύων

Μοντελοποίηση και Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Κων/νος Τζαφέστας

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: (210) 772-3687 (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.36)
E-mail: ktzaf@softlab.ntua.gr
Web: http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Εισαγωγή και Γενικεύσεις Νόμων Kirchhoff
2. Στοιχεία Κυκλώματος Γραμμικά & Μη-γραμμικά
3. Μέθοδοι Γραφής Εξισώσεων Δικτύων με Γράφους
4. Επίλυση και Αποκρίσεις Δικτύων Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων
5. Σημαντικά Θεωρήματα Δικτύων
6. Ανάλυση Διθύρων Δικτύων
7. Κυκλώματα Διακοπτόμενων Πυκνωτών

Βιβλιογραφία

- Τ. Κουσιουρής, *Θεωρία Ανάλυσης Συστημάτων και Κυκλωμάτων*, Ε.Μ.Π.
- Π. Μαραγκός, *Θεωρία Δικτύων: Συμπληρωματικές Σημειώσεις*, Ε.Μ.Π.
- L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, 1987. (621.3192 CHU)
- J. Vlach, K. Singhal, *Computer methods for circuit analysis and design*, New York : Van Nostrand Reinhold, 1994. (621.3815 VLA)
- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky with I. T. Young, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983.(003 OPP)
- R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lecture Notes on Physics: Vol.2*, Addison-Wesley Publishing, 1964. (530 FEY)
- M. E. Van Valkenburg, *Network Analysis*, Prentice-Hall, 1964.
- E.W. Kamen, *Introduction to Signals and Systems*, Macmillan, 1990.
- W.M. Siebert, *Circuits, Signals and Systems*, MIT Press, 1986.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Εισαγωγή στους Γράφους Κυκλωμάτων και Γενικεύσεις Νόμων Kirchhoff

- Προσέγγιση Συγκεντρωμένων Κυκλωμάτων
- Νόμοι Kirchhoff
  - *Νόμος Τάσεων* Kirchhoff (NTK) με τάσεις κόμβων
  - *Νόμος Ρευμάτων* Kirchhoff (NPK) με Gaussian επιφάνειες και με ομάδες διαχωρισμού
- Γράφος Κυκλώματος - Ορισμοί
- Έκφραση Νόμων Kirchhoff με Μήτρα Γράφου
- Θεώρημα Tellegen

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΣΥΣΚΕΥΕΣ → ΜΟΝΤΕΛΑ → ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

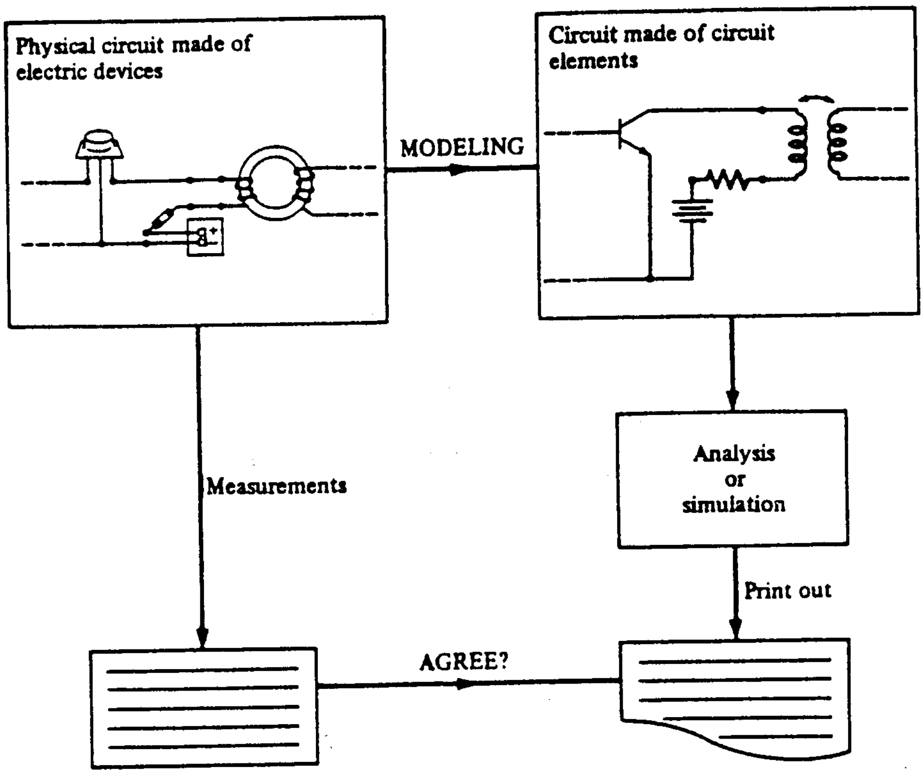


Figure Illustration of the relation between physical circuits and circuits, between physical devices and circuit elements, and between laboratory measurements and circuit analysis.

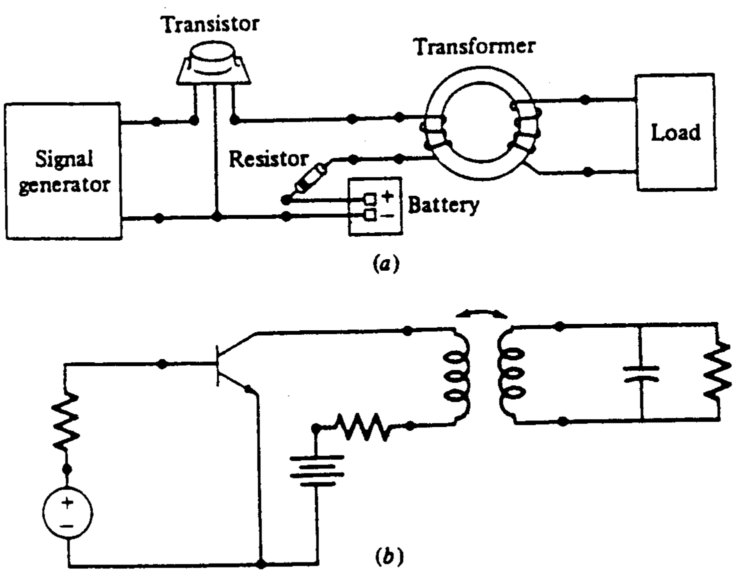


Figure (*a*) Physical circuit made of electric devices and (*b*) its circuit model made of circuit elements.

ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Στοιχείο = μοντέλο φυσικής συσκευής.

Κύκλωμα = διασύνδεση στοιχείων.

Σκοπός Θ.Κ.: Ανάλυση και πρόβλεψη της ηλεκτρικής συμπεριφοράς κυκλωμάτων (π.χ. πρόβλεψη και εξήγηση των τάσεων και ρευμάτων στα τερματικά της συσκευής), με στόχο την βελτίωση του σχεδιασμού και της λειτουργίας τους. Δεν εστιάζει στα φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν εντός της συσκευής.

Ευρύ Φάσμα Εφαρμογών:

- *Μέγεθος:* LSI $\longrightarrow$ TV/Radio $\longrightarrow$ δίκτυα τηλεπικοινωνιών & ισχύος.
- *Τάση:* μV (μηχαν. ακρίβειας) $\longrightarrow$ MV (δίκτυα ισχύος)
- *Ρεύμα:* 10^{-15}A (ηλεκτρόμετρα) $\longrightarrow$ 10^{6}A (δίκτυα ισχύος)
- *Συχνότητα:* 0 (DC) $\longrightarrow$ 10^{9}Hz (μικροκύματα)
- *Ισχύς:* 10^{-14}W (ευαίσθητοι δέκτες) $\longrightarrow$ 10^{9}W (ηλεκτρ. γεννήτριες)

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ: Η φυσική τους διάσταση είναι αρκετά μικρή ώστε, για το εκάστοτε πρόβλημα ενδιαφέροντος, η μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων να γίνεται σχεδόν ακαριαία.

- d= μέγιστη διάσταση, Δt= μικρότερος χρόνος ενδιαφέροντος:

  $d \ll c \cdot \Delta t \implies$ συγκεντρωμένο.

- f= μέγιστη συχνότητα ενδιαφέροντος:

  $d \ll c/f \implies$ συγκεντρωμένο.

Κατανεμημένα Κυκλώματα: κυματοδηγοί, γραμμές μεταφοράς.

Γράφοι Δικτύων (1)

- **Ορισμός – Προσανατολισμένος Γραμμικός Γράφος:**

Σύνολο σημείων (**κόμβοι**) και προσανατολισμένων (**φορά αναφοράς**) γραμμικών τμημάτων (**κλάδοι**) που συνδέουν κόμβους μεταξύ τους

- **Ορισμός – Γράφος Δικτύου:**

Προσανατολισμένος γραμμικός γράφος που προκύπτει εαν τα στοιχεία του κυκλώματος αντικατασταθούν με προσανατολισμένα γραμμικά τμήματα

Φορά αναφοράς κάθε κλάδου $\equiv$ φορά αναφοράς του ρεύματος και φορά αναφοράς της τάσης στο αντίστοιχο στοιχείο του κυκλώματος

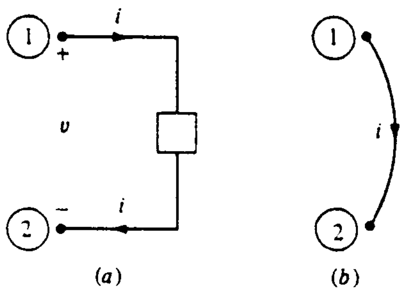
Τοπολογία Δικτύου : σύνολο ιδιοτήτων που εξαρτάται από τον *τρόπο διασύνδεσης* μεταξύ τους των στοιχείων που το συνθέτουν (ανεξάρτητη από το είδος των στοιχείων που συνθέτουν το κύκλωμα)

Γράφοι Δικτύων (2)

- **Ορισμός – Υπογράφος:** Υποσύνολο κόμβων και κλάδων ενός γράφου
  Γνήσιο υποσύνολο → κύριος υπογράφος
- **Ορισμός – Διαδρομή Γράφου:**
  Υπογράφος που συνίσταται από μία *διατεταγμένη ακολουθία κόμβων*:
  (α) Δύο κλάδοι ακριβώς μεταξύ όλων των κόμβων (*εσωτερικοί κόμβοι*) εκτός από δύο
  (β) Δύο *τελικοί κόμβοι* όπου καταλήγει ένας μόνο κλάδος
  (γ) Δεν υπάρχει άλλος κύριος υπογράφος –διαδρομή– με τους ίδιους τελικούς κόμβους
- **Ορισμός – Συνεκτικός Γράφος:**
  Υπάρχει τουλάχιστον μία διαδρομή μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων
- **Ορισμός – Βρόχος Γράφου:**
  Συνεκτικός υπογράφος: σε κάθε κόμβο καταλήγουν ακριβώς δύο κλάδοι
- **Ορισμός – Ομάδα Διαχωρισμού Συνεκτικού Γράφου:**
  Σύνολο κλάδων οι οποίοι όταν αφαιρεθούν όλοι διαχωρίζουν το γράφο σε δύο συνεκτικούς υπογράφους, ενώ εαν ένας δεν αφαιρεθεί ο γράφος παραμένει συνεκτικός

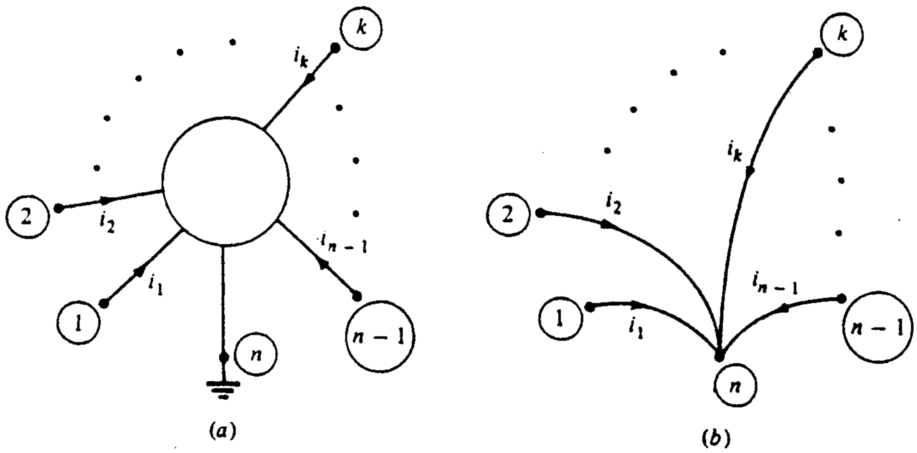
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ⟶ ΓΡΑΦΟΙ

- Δι-τερματικό (Μονό-θυρο) στοιχείο & προσανατολισμένος γράφος. (directed graph)



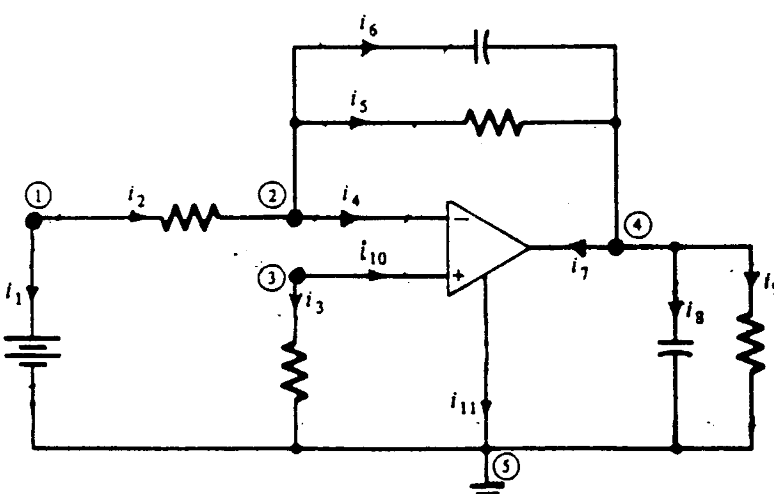
(a) A two-terminal element and (b) its digraph representation.

- Πολυ-τερματικό (multi-terminal) στοιχείο & γράφος.

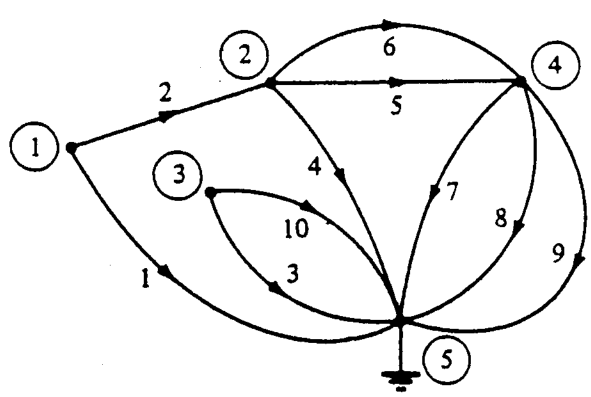


An n-terminal element and its element graph with node ⓝ as datum node.

- Κύκλωμα

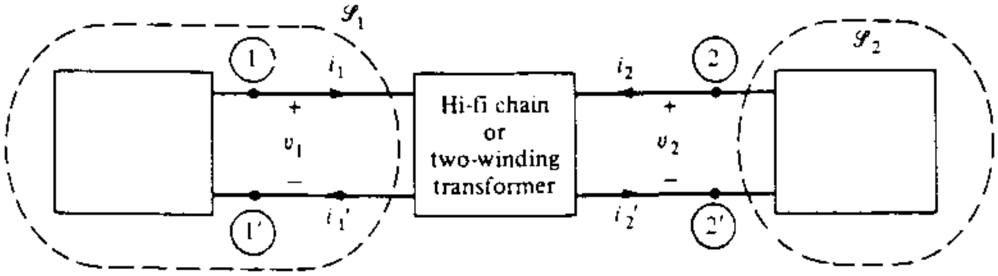


Γράφος

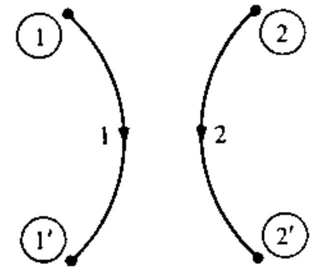


ΠΟΛΥ-ΘΥΡΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΦΟΙ ΜΕ ΑΡΘΡΩΣΗ

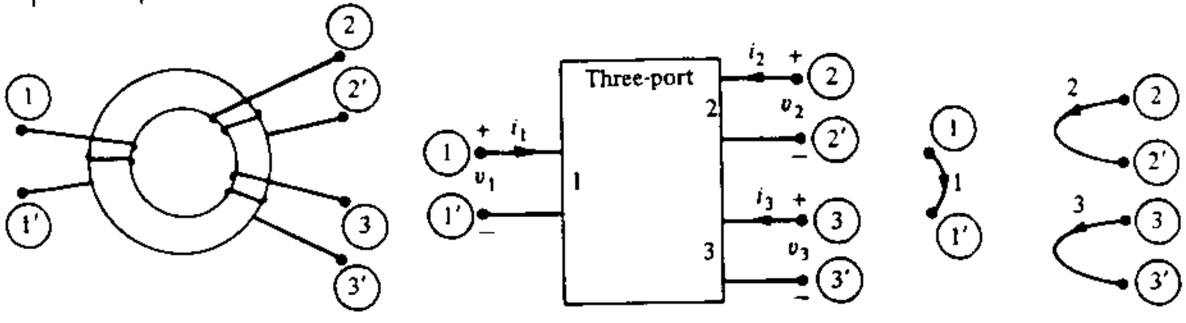
- ## Δίθυρο



Γράφος στοιχείων



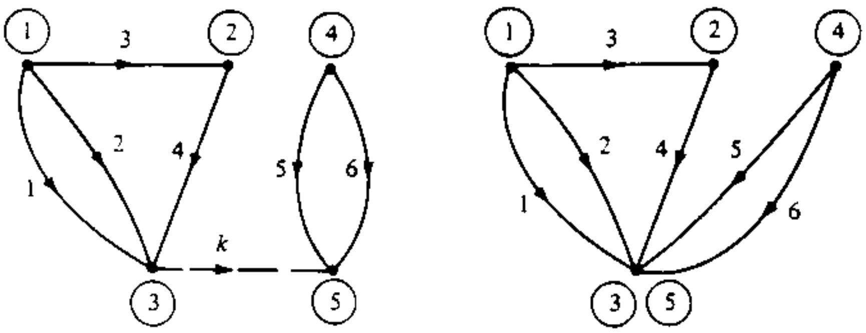
- ## Τρί-θυρο



(a) (b) (c)

(*a*) A three-winding transformer. (*b*) the corresponding three-port, and (*c*) its element graph.

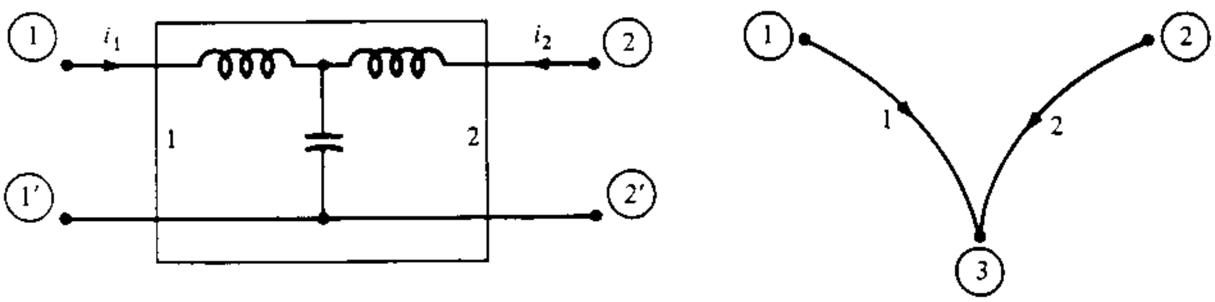
- ## Γράφος με άρθρωση (hinged graph)



(*a*) (*b*)

(*a*) Connecting nodes ③ and ⑤ by a branch *k*. (*b*) Soldering together nodes ③ and ⑤ to obtain a hinged graph.

- ## "Γειωμένο" δίθυρο



(*a*) (*b*)

(*a*) A "grounded" two-port and (*b*) its element graph.

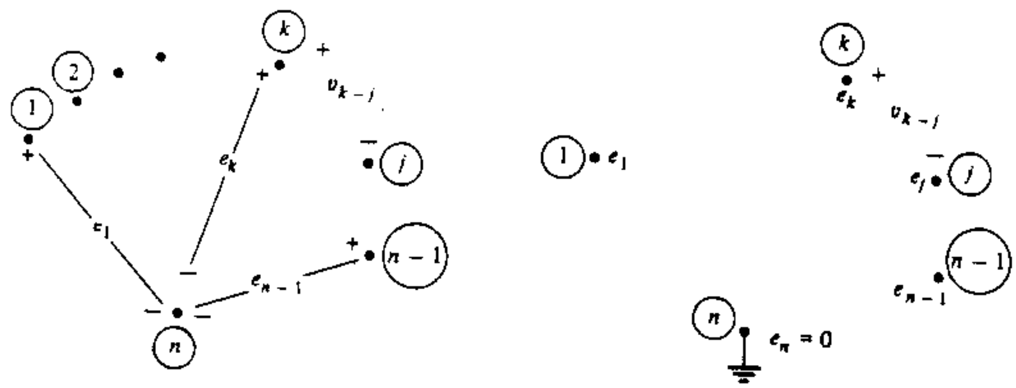
ΝΟΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ KIRCHHOFF ΜΕ ΚΟΜΒΟΥΣ

Θεωρούμε συνεκτικό συγκεντρωμένο κύκλωμα με n κόμβους.

Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα κόμβο αναφοράς.

$e_k(t)$ = **τάση κόμβου** k ως προς κόμβο αναφοράς, $k = 1, 2, ..., n$.

$v_{k-j}(t)$= διαφορά τάσης μεταξύ κόμβων k και j.



Ν.Τ.Κ. 1: Για κάθε συγκεντρωμένο συνεκτικό κύκλωμα, για κάθε επιλογή κόμβου αναφοράς, για κάθε χρόνο t, για όλα τα ζεύγη κόμβων k και j,

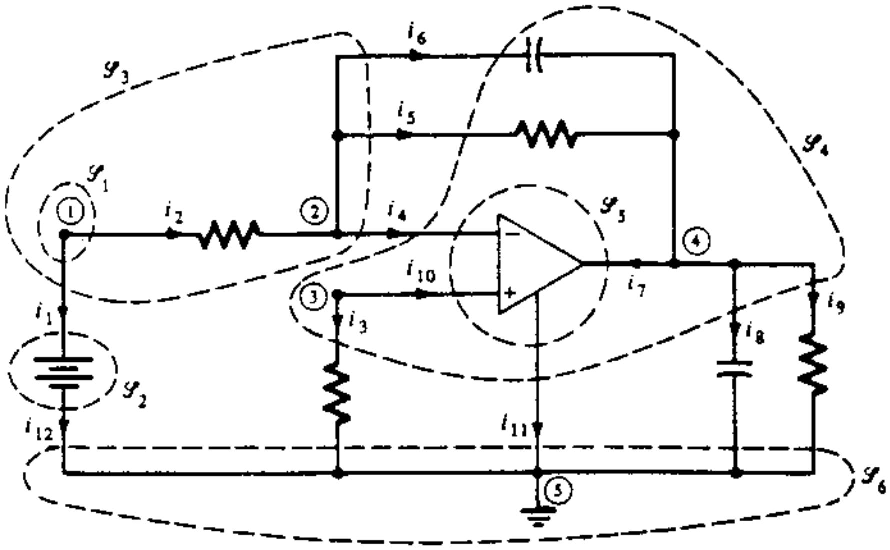
$$v_{k-j}(t) = e_k(t) - e_j(t)$$

Ν.Τ.Κ. 2 (νόμος κλειστών ακολουθιών κόμβων):

Για κάθε συγκεντρωμένο συνεκτικό κύκλωμα, για κάθε κλειστή ακολουθία κόμβων, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων μεταξύ διαδοχικών κόμβων γύρω από την επιλεγμένη ακολουθία κόμβων είναι μηδέν.

Θεώρημα: Ν.Τ.Κ. 1 $\Longleftrightarrow$ Ν.Τ.Κ. 2

ΝΟΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΩΝ KIRCHHOFF ΜΕ GAUSSIAN ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ



Ν.Ρ.Κ.: Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε Gaussian επιφάνεια $\mathcal{S}$, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων που εξέρχονται από την επιφάνεια $\mathcal{S}$ τον χρόνο t είναι μηδέν.

Ειδική Περίπτωση Ν.Ρ.Κ. (νόμος κόμβων):
Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων που εξέρχονται από κάθε κόμβο είναι μηδέν.

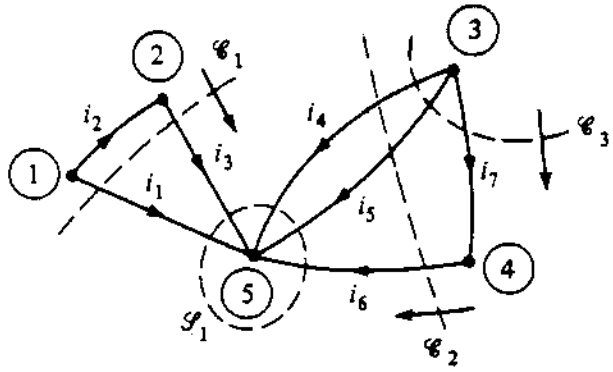
Παρατηρήσεις:

- Αρχή Διατήρησης Ηλεκτρικού Φορτίου $\Longrightarrow$ Ν.Ρ.Κ.
- Νόμος Επαγωγής Faraday $\Longrightarrow$ Ν.Τ.Κ.
- Ν.Τ.Κ. και Ν.Ρ.Κ. είναι οι δύο θεμελιώδεις αρχές της θεωρίας συγκεντρωμένων κυκλωμάτων.
- Ν.Τ.Κ. και Ν.Ρ.Κ. ισχύουν ανεξάρτητα από την φύση των στοιχείων του κυκλώματος. Αντανακλούν τις ιδιότητες διασύνδεσης.

ΝΟΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΩΝ KIRCHHOFF ΜΕ ΟΜΑΔΕΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Σε ένα συνεκτικό γράφο $\mathcal{G}$, ένα υποσύνολο κλάδων $\mathcal{C}$ του $\mathcal{G}$ είναι **ομάδα διαχωρισμού (cut set)** εάνν: (1) αφαίρεση όλων των κλάδων της $\mathcal{C}$ αποσυνδέει τον γράφο, και (2) παραμονή οποιουδήποτε κλάδου της $\mathcal{C}$ αφήνει τον γράφο συνεκτικό.

- Κάθε ομάδα διαχωρισμού κατανέμει τους κόμβους του γράφου σε 2 υποσύνολα.
- Σε κάθε ομάδα διαχωρισμού αντιστοιχεί μια Gaussian επιφάνεια που τέμνει τους ίδιους κλάδους.
- Σε κάθε Gaussian επιφάνεια αντιστοιχεί είτε μια ομάδα διαχωρισμού είτε μια ένωση ομάδων διαχωρισμού.
- Σε κάθε ομάδα διαχωρισμού ορίζουμε μια αυθαίρετη φορά αναφοράς.

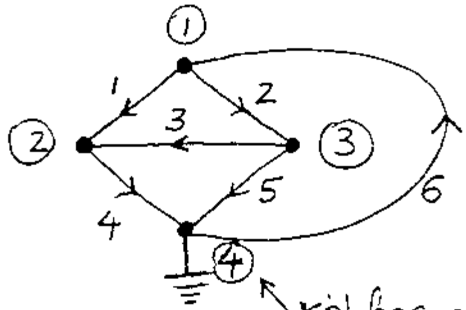


Ν.Ρ.Κ. (νόμος ομάδων διαχωρισμού): Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που σχετίζονται με κάθε ομάδα διαχωρισμού είναι μηδέν.

Θεώρημα: Οι τρεις μορφές του Ν.Ρ.Κ., με (1) Gaussian επιφάνειες, (2) κόμβους, και (3) ομάδες διαχωρισμού, είναι ισοδύναμες.

ΓΡΑΦΟΣ ΔΙΚΤΥΟΥ, ΝΡΚ, ΜΗΤΡΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ

* Συνεκτικός Γράφος $\mathcal{G}$
  n κόμβοι, b κλάδοι
  (χωρίς αυτο-βρόχους)



κόμβος αναφοράς

* ΝΡΚ $\forall$ κόμβο $\longrightarrow$ n εξισώσεις:

① $\quad i_1 + i_2 - i_6 = 0$
② $\quad -i_1 - i_3 + i_4 = 0$
③ $\quad -i_2 + i_3 + i_5 = 0$
④ $\quad -i_4 - i_5 + i_6 = 0$

* <u>Πλήρης Μήτρα Πρόσπτωσης A_a</u>

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Κλάδος: } 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \\
\begin{array}{r} \text{κόμβος } ① \rightarrow \\ ② \rightarrow \\ ③ \rightarrow \\ ④ \rightarrow \end{array} &
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{A_a \\ (n \times b)}}
\underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\substack{i \\ (b \times 1)}}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
, \quad \boxed{A_a i = 0}
$$

n εξισώσεις
γραμμ. εξαρτημένες

* Αγνοώντας μια εξίσωση ΝΡΚ (ενός αυθαίρετου κόμβου αναφοράς) $\longrightarrow$ <u>ελαττωμένη μήτρα πρόσπτωσης A</u>

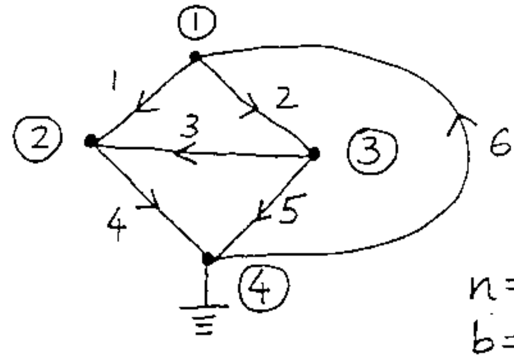
$$
\begin{array}{r} \text{κόμβος } ① \rightarrow \\ ② \rightarrow \\ ③ \rightarrow \end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ (n-1 \times b)}}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
, \quad \boxed{A i = 0}
$$

$n-1$ εξισώσεις
γραμμ. ανεξάρτητες

A έχει $n-1$ γραμμ. ανεξάρτητες γραμμές $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{rank}(A) = n-1}$

ΓΡΑΦΟΣ ΔΙΚΤΥΟΥ, ΝΤΚ, ΜΗΤΡΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ

* Συνεκτικός Γράφος $\mathcal{G}$
  n κόμβοι, b κλάδοι
  (χωρίς αυτο-βρόχους)



$n=4$
$b=6$

Διάνυσμα Τάσεων Κλάδων: $v=(v_1, v_2, \dots, v_b)^T$

Διάνυσμα Τάσεων Κόμβων: $e=(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})^T$
(ως προς κόμβο αναφοράς)

* ΝΤΚ $\longrightarrow$

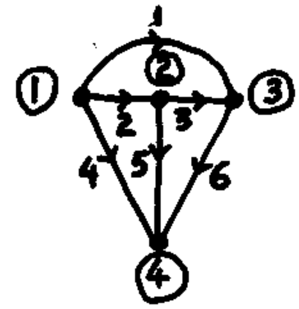
$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{v} = \begin{bmatrix} e_1-e_2 \\ e_1-e_3 \\ -e_2+e_3 \\ e_2 \\ e_3 \\ -e_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{=A^T \\ b\times(n-1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}}_{e}$$

$$\boxed{v = A^T e}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ TELLEGEN

Θεωρούμε ένα αυθαίρετο κύκλωμα, του οποίου ο προσανατολισμένος γράφος $\mathcal{G}$ έχει b κλάδους και συσχετισμένες φορές αναφοράς. Εάν $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_b)^T$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο ρευμάτων κλάδων που ικανοποιεί τον Ν.Ρ.Κ. για τον $\mathcal{G}$ και εάν $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_b)^T$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο τάσεων κλάδων που ικανοποιεί τον Ν.Τ.Κ. για τον $\mathcal{G}$, τότε

$$\sum_{k=1}^{b} v_k i_k = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathbf{v}^T\mathbf{i} = 0$$



- **Παράδειγμα:**

$$\left.\begin{array}{c} \overbrace{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) = (1, 2, 3, -3, -1, 4)}^{\text{αυθαίρετη επιλογή με βάση Ν.Ρ.Κ.}} \\ \underbrace{(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = (-2, -1, -1, 4, 5, 6)}_{\text{αυθαίρετη επιλογή με βάση Ν.Τ.Κ.}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{6} v_k i_k = 0.$$

- $\mathbf{i}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ ικανοποιούν Ν.Ρ.Κ. και Ν.Τ.Κ. $\forall t \geq 0 \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t_1) i_k(t_2) = 0, \quad \sum_{k=1}^{b} v_k(t_1) \frac{di_k}{dt}(t_2) = 0, \quad \sum_{k=1}^{b} \frac{dv_k}{dt}(t_1) i_k(t_2) = 0$$

- **Διατήρηση Ενέργειας:** για κάθε συγκεντρωμένο συνεκτικό κύκλωμα

$$\frac{d}{dt}\text{Energy}(t) = \sum_{k=1}^{b} v_k(t) i_k(t) = 0 \Longrightarrow \text{Energy}(t) = \text{constant}.$$

- **Γεωμετρική Ερμηνεία:**

(συνεκτικός $\mathcal{G}$, n κόμβοι, b κλάδοι, $\mathbf{e}$=τάσεις κόμβων, $\mathbf{A}$=μήτρα πρόσπτωσης)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{i} \text{ ικανοποιεί Ν.Ρ.Κ.} \Longleftrightarrow \mathbf{Ai} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{i} \in K_i \\ \mathbf{v} \text{ ικανοποιεί Ν.Τ.Κ.} \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \Longleftrightarrow \mathbf{v} \in K_v \end{array}\right\} \Longrightarrow K_i \perp K_v$$